Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Ene-Mar 2005

Nombre: ______________________________

Carnet: _________________ Sección: ______

MA-2115—Primer Parcial, 02/02/05, 30 %—2:30pm–A

#1→12 pts	#2→6 pts	#3→6 pts	#4→6 pts	Total→30 pts

1. (12 pts.) Justifique sus respuestas a las siguientes preguntas (3 pts. c/u):

a) Discuta la convergencia de las series (i) y (ii). Halle la suma de las que converjan.

(i)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}-\frac{1}{\sqrt{n+4}}\right)$$

(ii)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1+n^2}{n^3}\right).$$

b) Discuta la convergencia de las series (iii) y (iv):

(iii)
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\left(\ln(n)\right)^4}$$

(iv)
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^n+4n}{n!}$$

Solución:

a) Veamos las sumas parciales S_k.

$$\begin{aligned}
S_k &= \sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}-\frac{1}{\sqrt{n+4}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+3}}-\frac{1}{\sqrt{k+4}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{k+4}}
\end{aligned}$$

Calculamos $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{k+4}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Entonces la serie converge y su suma es $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) Calculamos $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1+n^2}{n^3}\right) = \operatorname{sen}(0) = 0$, entonce prodría converger.
Ahora comparamos con la serie armónica.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1+n^2}{n^3}\right)}{\dfrac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1+n^2}{n^3}\right)}{\dfrac{1+n^2}{n^3}}}{\dfrac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1+n^2}{n^3}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1+n^2}{n^3}\right)}{\dfrac{1+n^2}{n^3}} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1+n^2}{n^3}}{\dfrac{1}{n}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto la serie dada **diverge**.

c) Consideramos la función real $f(x) = \dfrac{1}{x\,(\ln(x))^4}$, y probamos con el criterio de la integral. Calculamos

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{1}{x\,(\ln(x))^4}\,dx &= \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{-1}{3\,(\ln(x))^3} \right|_2^R \\
&= \frac{1}{3\,(\ln(2))^3}
\end{aligned}$$

Se trata entonces de una integral impropia convergente.
Por lo tanto la serie dada **converge**.

d) Probemos con el criterio del cociente. Tenemos $a_n = \frac{5^n+4n}{n!}$. Calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}+4(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{5^n+4n}{n!}} &= \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}+4(n+1)}{(n+1)}}{5^n+4n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+4(n+1)}{(n+1)(5^n+4n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{4(n+1)}{5^n}}{(n+1)(1+\frac{4n}{5^n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{4(n+1)}{5^n}}{(1+\frac{4n}{5^n})} \\
&= 0\cdot 5 = 0 < 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto la serie dada **converge**.

2. (6 pts.) Determine el conjunto de convergencia de la serie de potencias,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\,x^n}{e^n},$$

y halle la suma cuando $x = 1$.
Solución: Consideramos $a_n = (-1)^n \frac{n\,x^n}{e^n}$ para aplocar el criterio de la razón. Calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\,|x|^{n+1}}{e^{n+1}}}{\frac{n\,|x|^n}{e^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n(n+1)\ |x|}{e^{n+1}n} \\ &= \frac{|x|}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n} \\ &= \frac{|x|}{e} \end{aligned}$$

La serie de potencias CONVERGE ABSOLUTAMENTE si $\frac{|x|}{e} < 1$, es decir si $-e < x < e$.

Analizamos los extremos del intervalo: para $x = -e$ se tiene la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\,(-e)^n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ que es DIVERGENTE.

Para $x = e$ se tiene la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\,e^n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ que es DIVERGENTE.

Entonces la serie de potencias CONVERGE si $-e < x < e$.

Ahora calculamos la suma en $x = 1$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\,1^n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{e^n} = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{3}{e^3} - \cdots + (-1)^n \frac{n}{e^n} + \cdots = S$.

Entonces $\displaystyle\frac{1}{e}S = -\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^3} - \frac{3}{e^4} - \cdots + (-1)^n \frac{n}{e^{n+1}} + \cdots$.

Sumando obtenemos $\displaystyle\left(1 + \frac{1}{e}\right)S = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^3} - \cdots - \frac{1}{e^n} + \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n} = \frac{1}{1-e}$.

Entonces $\displaystyle\left(1 + \frac{1}{e}\right)S = \frac{1}{1-e}$, por lo tanto $\boxed{S = \dfrac{e}{(1-e)(1+e)}}$.

3. (6 pts.) Calcule la integral definida $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, con un error menor que $\frac{1}{1000}$.
Solución: Recordamos el desarrollo de la serie de Maclaurin de e^x convergente en todo $\mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \text{ por lo que } e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

Integrando, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}\,dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\right) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right|_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{(5)2!} - \frac{1}{(7)3!} + \frac{1}{(9)4!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots\end{aligned}$$

El término para $n = 5$ de la serie alternante anterior es $-\frac{1}{(11)5!} = -\frac{1}{1320} \in (-\frac{1}{1000}, +\frac{1}{1000})$. Por lo tanto la suma buscada es $\boxed{S \sim 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0,747 \text{ con error menor que una milésima}}$.

4. (6 pts.) Analice la convergencia o divergencia de la sucesión,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}; \quad \text{para } n \geq 1.$$

Solución: Tenemos $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2!}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$, ..., $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ y $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}$. Tenemos entonces que $a_{n+1} > a_n$, por lo que la sucesión es monótona creciente.

Veamos si la sucesión es acotada: Se sabe que $n! > 2^{n-1}$ por lo tanto $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$. Entonces $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$. Entonces los a_n están acotados superiormente por 2. Por lo tanto la serie CONVERGE (por ser monótona creciente y acotada superiormente).